K elektrodynamice pohybujících se těles;
od A. Einsteina.

Je známo, že Maxwellova elektrodynamika, jak je pojímána dnes, vede v aplikacích na pohybující se tělesa k asymetriím, které nejsou v souladu s pozorováním. Myslí se tím např. vzájemné elektrodynamické působení mezi magnetem a vodičem. Pozorovaný jev závisí jen na relativním pohybu mezi vodičem a magnetem, ale v obvyklém pojetí jsou od sebe oba případy, kdy se jedno nebo druhé těleso pohybuje, zásadně odděleny. Pohybuje-li se magnet a vodič je v klidu, vzniká v okolí magnetu elektrické pole s určitou energií, které v oblastech kde se nachází části vodiče vytváří proud. Ale pokud je magnet v klidu a pohybuje se vodič, nevzniká v okolí magnetu žádné elektrické pole. Ve vodiči však vzniká elektromotorická síla, které neodpovídá žádná energie, ale - shoda relativních pohybů se v obou případech předpokládá - způsobí elektrický proud o téže velikosti a směru, jako v prvním případě.

Podobné příklady, stejně jako nezdařené pokusy zjistit pohyb země vůči “světelnému éteru”, vedou k domněnce, že pojmu absolutního klidu nevyhovují žádné vlastnosti jevů nejen v mechanice, ale také v elektrodynamice. Pro všechny soustavy souřadnic, pro něž platí rovnice mechaniky, mají platnost také stejné elektrodynamické a optické zákony, jak je již dokázáno u veličin prvního řádu. Chceme tuto domněnku (jejíž obsah bude dále zmíněn v “principu relativity”) pozvednout na předpoklad a kromě toho uvést jen zdánlivě neslučitelný předpoklad, že světlo se v prázdném prostoru šíří vždy určitou rychlostí V, jenž je nezávislá na pohybovém stavu tělesa, které ho vydává. Tyto dva předpoklady postačují k odvození jednoduché a bezrozporné elektrodynamiky pohybujících se těles se základem v Maxwellově teorii těles v klidu. Zavedení “světelného éteru” se v tomto pojetí ukáže jako nadbytečné, když se nepoužije ani “absolutně klidný prostor” vybavený

zvláštními vlastnostmi, ani nebude přiřazen bodům prázdného prostoru, ve kterém se dějí elektromagnetické procesy, žádný vektor rychlosti.

Rozvíjená teorie se opírá - jako každá jiná elektrodynamika - o kinematiku tuhého tělesa, protože výroky každé takové teorie popisují vztahy mezi tuhými tělesy (soustavami souřadnic), hodinami a elektromagnetickými jevy. Nedostatečný důraz na tuto okolnost je pramenem těžkostí, se kterými současná elektrodynamika pohybujících se těles bojuje.

I. Kinematická část.

§1. Definice současnosti.

Mějme soustavu souřadnic, v níž platí Newtonovy zákony mechaniky. Nazýváme ji kvůli jazykovému odlišení od později zavedených soustav souřadnic a pro přesnější představu “nehybnou soustavou”.

Polohu hmotného bodu, který je nehybný vzhledem k této soustavě souřadnic, můžeme určit tuhým měřítkem s použitím euklidovské geometrie a vyjádřit v kartézských souřadnicích.

Pokud chceme popsat *pohyb* hmotného bodu, udáme jeho souřadnice jako funkci času. Je zřejmé, že takový matematický popis má fyzikální smysl až tehdy, když se předem objasní, co zde znamená pojem “čas”. Všimněme si, že všechny naše úsudky, v nichž hraje roli čas, jsou vždy úsudky o *současných událostech*. Když např. řekneme: “Ten vlak sem přijede v 7 hodin,” tak to asi znamená: “Ukázání malé ručičky mých hodinek na 7 a příjezd vlaku jsou současné události.” [1)]

Mohlo by se zdát, že všechny obtíže spojené s definicí “času” se dají překonat tím, že místo slova “čas” použijeme výraz

---

[1)] Nepřesnost v tom, že dvě události probíhají současně na (přibližně) totožných místech a která je překlenuta abstrakcí, zde nebude probírána.

"postavení malé ručičky mých hodinek". Taková definice skutečně stačí, když se jedná o určení času pouze na místě, kde se právě hodiny nacházejí. Už ale nestačí, pokud chceme řady událostí, dějících se na různých místech, svázat čase nebo, což je totéž, časově ohodnotit události, odehrávající se na místech vzdálených od hodin.

Mohli bychom se zajisté spokojit s takovým ohodnocením událostí v čase, že pozorovatel nacházející se i s hodinami v počátku souřadnic, přiřadí událostem tu polohu hodinových ručiček, při níž k němu dospěje prázdným prostorem světelné znamení. Jak víme ze zkušenosti nedostatek tohoto přiřazení spočívá v tom, že není nezávislé na místě pozorovatele s hodinami. K praktičtějšímu stanovení dospějeme následující úvahou.

Nachází-li se v bodě *A* hodiny, pak může pozorovatel v *A* hodnotit časově události v bezprostředním okolí nalezením současného postavení hodinových ručiček. Nachází-li se v bodě *B* prostoru také hodiny - dodejme, že "hodiny přesně stejných vlastností jako mají hodiny, které se nacházejí v *A*" - je možné také časové ohodnocení událostí v bezprostředním okolí *B* pozorovatelem v *B*. Ale nemůžeme bez další definice událost v *A* a událost v *B* srovnávat. Zatím máme pouze "čas *A*" a "čas *B*", ale žádný společný "čas" pro *A* i *B*. Tento čas můžeme určit jedině tak, když *definicí* stanovíme, že světlo potřebuje stejný "čas", aby dospělo od *A* do *B*, jako "čas", který potřebuje aby dospělo z *B* do *A*. Kdyby byl totiž paprsek vyslán z *A* do *B* v "čase *A*" t_A, byl by v *B* v "čase *B*" t_B odražen a dorazil by v "čase *A*" t'_A zpět do *A*. Oboje hodiny jdou podle definice synchronně, když

$$t_B - t_A = t'_A - t_B .$$

Předpokládáme, že tato definice synchronismu je bezrozporná a to pro libovolný počet bodů a že tedy všeobecně platí tyto vztahy:

1) Když jdou hodiny v *B* synchronně s hodinami v *A*, tak jdou hodiny v *A* synchronně s hodinami v *B*.

2) Když jdou hodiny v *A* synchronně nejen s hodinami v *B*, ale i s hodinami v *C*, tak jdou synchronně i hodiny v *B* relativně vůči hodinám v *C*.

Pomocí určité (myšlené) fyzikální zkušenosti jsme tak stanovili, co se rozumí synchronně jdoucími hodinami, umístěnými v klidu na různých místech a tím jsme zřejmě definici "současnosti" a "času" získali. "Čas" události je s danou událostí současný údaj hodin, které se nacházejí v klidu na místě události a jdou synchronně (pro všechny odečty času) s jinými hodinami, které jsou v klidu.

Stanovíme ještě s ohledem na zkušenost, že veličina

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

je univerzální konstanta (rychlost světla v prázdném prostoru).

Důležité je, že jsme čas definovali pomocí hodin v klidu a v klidovém systému. Vzhledem k tomu nazveme právě definovaný čas pro jeho příslušnost ke klidovému systému jako "čas klidového systému".

§2. O relativitě délek a časů.

Následující úvahy se opírají o princip relativity a princip konstantní rychlosti světla, které zde definujeme.

1) Zákony, podle kterých se mění stavy fyzikálních systémů, jsou nezávislé na tom, ve kterém z (ze dvou) vůči sobě se rovnoměrně přímočaře pohybujících systémů jsou uplatňovány.

2) Každý světelný paprsek se v "klidovém" souřadném systému pohybuje určitou rychlostí *V* nezávisle na tom, zda těleso, kterým byl vyslán, je v klidu nebo se pohybuje. Zároveň je

$$\text{rychlost} = \frac{\text{dráha světla}}{\text{doba}} ,$$

přičemž "čas" je chápán ve smyslu definice §1.

Nechť je dána tuhá tyč v klidu, jejíž délka, měřená měřítkem rovněž v klidu, je l. Představme si nyní, že osa tyče je položena do X-*ové* osy klidového souřadného systému, tyč se pohybuje (rychlostí v) přímočarým pohybem rovnoběžně s osou X ve smyslu rostoucího x. Nyní se ptáme na délku *pohybující se* tyče, kterou zjistíme pomocí následujících dvou operací:

a) Pozorovatel se pohybuje s dříve uvedeným měřítkem a poměřuje délku tyče přikládáním měřítka, právě tak jak měřil tyč, když se nacházela v klidu.

b) Pozorovatel v klidovém souřadném systému zjišťuje pomocí klidových hodin synchronizovaných podle §1, ve kterých bodech klidového systému se nachází počátek a konec měřené tyče v určitém čase t. Vzdálenost těchto bodů, měřenou již použitým měřítkem v klidu, je možno také označit jako “délku tyče”.

Podle principu relativity musí délka, kterou nazýváme “délka tyče v pohybujícím se systému” nalezená při operaci a) být stejná jako délka l klidové tyče. Délka tyče nalezená podle operace b) s využitím obou našich principů, kterou nazýváme “délka (pohybující se) tyče v klidovém systému” je různá od l.

Obecně používaná kinematika předpokládá, že pomocí obou operací určené délky tyče jsou přesně stejné nebo jinými slovy, že pohybující se tuhé těleso v časovém úseku t je z geometrického pohledu plně nahraditelné *týmž* tělesem, které je v dané poloze *v klidu*.

Dále mějme dvoje, písmeny (A a B), označené hodiny, které jsou synchronní s hodinami v klidovém systému, tj. ukazují “čas klidového systému” na místech kde se právě nacházejí; jsou tedy “synchronní v klidovém systému”. Dále myslíme, že se s každými hodinami pohybují pozorovatelé, kteří mají oboje hodiny udržovat

synchronizované podle kritéria v §1. V čase [1] t_A vyrazí světelný paprsek z A, v čase t_B bude odražen z B a v čase t'_A dorazí zpět do A.

S ohledem na princip konstantní rychlosti světla nalézáme:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

a

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

přičemž r_{AB} je délka pohybující se tyče měřená v klidovém systému. Pozorovatel, který se pohybuje s tyčí, by tedy prohlásil, že oboje hodiny nejsou synchronní, zatímco pozorovatel v klidovém systému by je za synchronní prohlásil.

Vidíme tedy, že pojmu současnosti, kterým se zabýváme, nemůžeme přičítat *absolutní* význam, ale, že dvě události, které považujeme za současné v jednom souřadném systému, v jiném vůči prvnímu se relativně pohybujícímu systému jako současné nechápeme.

§3. Teorie souřadnicových a časových transformací od klidového systému na systém, který se vůči tomuto pohybuje přímočaře.

Nechť jsou v “klidovém” prostoru dva souřadné systémy, tj. dva systémy, z nichž každý má tři, z jednoho bodu vycházející, na sebe kolmé, tuhé, hmotné osy. X-ové osy obou systémů mohou splývat, Y-ové a Z-ové osy jsou rovnoběžné. Každému systému přiřadíme jedny hodiny a tuhé měřítko, a nechť jsou obě měřítka i oboje hodiny obou systémů navzájem přesně stejné.

Počátku jednoho systému (k) je udělena (konstantní) rychlost v ve směru rostoucího x druhého, klidového systému (K), tuto rychlost můžeme udělit také příslušným měřítkům na osách a hodinám.

[1] “Čas” zde znamená “čas klidového systému” a zároveň “polohu ručiček pohybujících se hodin, které se na místě, o němž je řeč, nachází”.

Kterémukoliv času t klidového systému (K) odpovídá jistá poloha os pohybujícího se systému a vzhledem k symetrii jsme schopni přijmout, že pohyb od K je takový, že osy pohybujícího se systému v čase t (čas t označuje vždy čas klidového systému) jsou vždy rovnoběžné s osami klidového systému. Nyní uvažujeme prostor systému K měřený měřítky v klidu a pohybující se systém k s měřítky, které se s ním pohybují a tak zjišťujeme souřadnice x, y, z př. ξ, η, ζ. Čas t ve všech bodech klidového systému, v nichž se nacházejí hodiny, určíme s pomocí hodin, které jsou v klidu v tomto systému a s pomocí světelného signálu metodou uvedenou v §1; stejně určíme čas τ pohybujícího se systému ve všech bodech tohoto systému, v němž se nacházejí hodiny, které jsou vůči němu v klidu, s použitím světelných signálů mezi těmito body podle postupu uvedeného v §1.

Ke každé události klidového systému se soustavou souřadnic x, y, z, t která zcela určuje místo a čas přísluší událost v systému k, daná souřadnicovou soustavou ξ, η, ζ, τ. Nyní je úkolem vyřešit soustavu rovnic, která tyto veličiny spojuje.

Je zřejmé, že rovnice musí být lineární kvůli homogenitě vlastností, které u prostoru a času předpokládáme.

Jestliže položíme $x' = x - vt$, je zřejmé, že bodům, které jsou v klidu v systému k, náleží určitý na čase nezávislý systém hodnot x', y, z. Nejdříve určíme τ jako funkci x', y, z a t. K tomuto účelu v rovnicích vyjádříme, že τ není nic jiného než souhrn údajů od hodin, které jsou v klidu v systému k a jsou synchronizovány podle pravidla z §1.

Z počátku systému k bude v čase τ_0 vyslán světelný paprsek podél X-ové osy do x' a odtud bude v čase τ_1 odražen do počátku souřadného systému, kde dorazí v okamžiku τ_2; pak tedy musí být:

$$\frac{1}{2}\left(\tau_0 + \tau_2\right) = \tau_1 .$$

nebo, použitím argumentů funkce τ a aplikací principu konstantní rychlosti světla v klidovém systému:

$$\frac{1}{2}\left[\tau\left(0,0,0,t\right) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V - v} + \frac{x'}{V + v}\right\}\right)\right] = \tau\left(x',0,0,t + \frac{x'}{V - v}\right)$$

Z toho vyplývá, když se zvolí x' nekonečně malé

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V - v} + \frac{1}{V + v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V - v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

nebo

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 .$$

Všimněme si, že bychom místo počátku souřadnic mohli zvolit libovolný jiný bod jako výchozí bod světelného paprsku a proto platí tato rovnice pro všechny hodnoty x', y, z.

Všimněme si, že podobná úvaha - použitá na osy H a Z - ukazuje, že se světlo šíří podél těchto os, uvažovaných v klidovém systému, rychlostí $\sqrt{V^2 - v^2}$:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 .$$

Z těchto rovnic plyne, že τ je *lineární* funkcí:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

přičemž a je zatím neznámá funkce $\varphi(v)$ a pro stručnost předpokládejme, že jsme v počátku systému k je $\tau = 0$ $t = 0$.

S pomocí tohoto výsledku je snadné určit veličiny ξ, η, ζ prostřednictvím rovnic vyjadřujících, že se světlo (jak to vyžaduje princip konstantní rychlosti světla ve spojení s principem relativity) také měřeno v pohybujícím se systému šíří konstantní rychlostí V. Pro světelný paprsek vyslaný v čase $\tau = 0$ ve směru rostoucí ξ platí:

$$\xi = V\tau ,$$

nebo

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

Ale nyní se pohybuje světelný paprsek vzhledem k počátečnímu bodu k, měřeno v klidovém systému, rychlostí $V - v$, takže platí:

$$\frac{x'}{V - v} = t .$$

Dosadíme-li tuto hodnotu t do rovnice pro ξ, tak získáme:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2} x' .$$

Obdobným způsobem nalezneme pomocí úvahy o světelných paprscích pohybujících se podél obou zbylých os:

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

kde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t ;\; x' = 0 ;$$

tedy

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

a

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z .$$

Jestliže dosadíme za x' jeho hodnotu, tak obdržíme:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)y ,$$

$$\zeta = \varphi(v)z ,$$

kde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

a φ je zatím neznámá funkce závislá na v. Jestliže se nedělají žádné předpoklady o počáteční poloze pohybujícího se systému a o nulovém bodě τ, tak se na pravou stranu těchto rovnic připojí aditivní konstanta.

Nyní musíme dokázat, že se každý světelný paprsek, měřeno v pohybujícím se systému, šíří rychlostí V, pokud je to, jak jsme přijali, událost soustavy v klidu; neboť jsme ještě nepodali důkaz, že princip konstantní rychlosti světla je slučitelný s principem relativity.

V čase $t = \tau = 0$, kdy je společný počátek souřadnic obou systémů, vyšleme z tohoto počátku kulovou vlnu, která se šíří v systému K rychlostí V. Pokud je právě teď vlnou zasažen bod (x, y, z), pak platí

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 .$$

Tuto rovnici transformujeme pomocí našich transformačních rovnic a po jednoduchém výpočtu obdržíme:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 .$$

Vlna je tedy také v pohybujícím se systému pozorována jako kulová s rychlostí šíření V. Tímto je dokázáno, že oba naše základní principy jsou spolu slučitelné.

V transformačních rovnicích, které jsme odvodili, vystupuje neznámá funkce φ závislá na v, kterou chceme nyní určit.

Za tímto účelem zavedeme ještě souřadný systém K', který se pohybuje vůči systému k přímočaře rovnoběžně k ose Ξ, tak ,že se jeho počátek souřadnic pohybuje rychlostí -v podél osy Ξ. V okamžiku $t = 0$ se shodují počáteční body všech tří systémů souřadnic a nechť je pro $t = x = y = z = 0$ čas t' systému K' také nulový. Nazvěme x', y', z' souřadnice systému K' a dvojím použitím našich transformačních rovnic obdržíme:

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t\,,$$
$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x\,,$$
$$y' = \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y\,,$$
$$z' = \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z\,.$$

Vztahy mezi souřadnicemi x', y', z' a x, y, z neobsahují čas t a systémy K a K' musí být tedy vůči sobě v klidu, a je zřejmé, že transformace z K na K' musí být identickou transformací. Je tedy:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1\,.$$

Nyní se ptáme na význam $\varphi(v)$. Vezměme část osy H systému k, která je položena mezi body $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ a $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Tato část osy H je tyčí, která se pohybuje vůči systému K rychlostí v kolmo ke své ose. Konce tyče mají v K souřadnice:

$$x_1 = vt\,,\ y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}\,,\ z_1 = 0$$

a

$$x_2 = vt\,,\ y_2 = 0\,,\ z_2 = 0\,.$$

Délka tyče, měřeno v K, je tedy $l/\varphi(v)$; tím je dán význam funkce φ. Z důvodů symetrie je zřejmé, že délka tyče, která se pohybuje kolmo ke své ose, měřená v klidovém systému, je závislá na této rychlosti, ale ne na směru a smyslu pohybu. Nemění se tedy v klidovém systému měřená délka pohybující se tyče, když zaměníme v s $-v$. Z toho plyne:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}$$

nebo

$$\varphi(v) = \varphi(-v)\,.$$

Z těchto a dříve nalezených vztahů vyplývá, že $\varphi(v) = 1$, takže transformační rovnice přecházejí na:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \beta(x - vt)\,,$$
$$\eta = y\,,$$
$$\zeta = z\,,$$

kde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\,.$$

§4. Fyzikální význam získaných rovnic pohybujícího se tuhého tělesa a s ním se pohybujících hodin

Pozorujeme tuhou kouli [1)] o poloměru R, která je v klidu vůči pohybujícímu se systému k a jejíž střed leží v počátku souřadnic k. Rovnice povrchu této koule, která se pohybuje vůči systému K rychlostí v, je:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2\,.$$

Rovnice povrchu je v souřadnicích x, y, z v čase $t = 0$:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2\,.$$

Tuhé těleso, které má při měření v klidu tvar koule, má v pohybu - pozorováno v klidovém systému - tvar rotačního elipsoidu s osami

[1)] To je těleso, které má v klidu tvar koule.

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\text{, } R, R.$$

Zatímco se *Y*-ové a *Z*-ové rozměry koule (a tedy také každého tuhého tělesa libovolného tvaru) při pohybu nemění, jeví se *X*-ový rozměr v poměru $1:\sqrt{1-(v/V)^2}$ zkrácený. Tedy tím více, čím je větší *v*. Při $v=V$ se smrští všechny pohybující se předměty - pozorováno z "klidového" systému - na plošný útvar. Pro nadsvětelné rychlosti budou naše úvahy beze smyslu; ostatně následující úvahou zjistíme, že rychlost světla hraje v naší teorii fyzikální roli nekonečně velké rychlosti.

Je zřejmé, že stejné výsledky platí také pro tělesa v klidu v "klidovém" systému, která jsou pozorována z pohybujícího se systému.

Mějme jedny hodiny, které jsou-li v klidu v klidovém systému, udávají čas *t* a jsou-li v klidu vzhledem k pohybujícímu se systému *k*, udávají čas τ. Leží v počátku souřadnic *k* a jsou tak nastaveny, že ukáží čas τ. Jak rychle jdou tyto hodiny, jsou-li pozorovány z klidového systému?

Mezi veličinami *x*, *t* a τ, které se vztahují k místu hodin, platí zřejmě rovnice:

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)$$

a

$$x=vt$$

Je tedy

$$\tau=t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}=t-\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t\,,$$

z čehož plyne, že údaj hodin (pozorováno v klidovém systému) je za sekundu opožděn o $\left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\right)$ sek. nebo, zanedbáme-li hodnoty čtvrtého a vyššího řádu, o $\frac{1}{2}(v/V)^2$ sek.

Z toho vyplývá zvláštní důsledek. V bodech *A* a *B* jsou v klidu vůči *K*, pozorováno v klidovém systému, synchronní hodiny, když pohybujeme hodinami v *A* rychlostí *v* ve směru do *B*, zjistíme po příchodu těchto hodin do *B*, že oboje hodiny již nejsou synchronní, nýbrž že hodiny, které se pohybují z *A* do *B* se proti hodinám, které se v *B* od začátku nacházejí zpožďují o $\frac{1}{2}t\,v^2/V^2$ sek. (až na hodnoty čtvrtého a vyššího řádu), jestliže *t* je čas, který potřebují hodiny od *A* do *B*.

Je hned vidět, že tento výsledek má platnost také, když se hodiny pohybují z *A* do *B* po libovolné polygonální trati, a také tehdy, když se body *A* a *B* shodují. Předpokládáme, že tento výsledek dokázaný pro polygonální čáru platí také pro nepřetržitou křivku. Tak obdržíme větu: Pokud se v bodě *A* nalézají dvoje synchronní hodiny a jedněmi z nich pohybujeme po uzavřené křivce neměnnou rychlostí, až se vrátí zpět do bodu *A*, což trvá *t* sek., tak jdou tyto hodiny po svém příchodu do *A* vzhledem k nepohybujícím se hodinám o $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ sek. pozadu. Usuzujeme z toho, že hodiny s nepokojem, které se nacházejí na zemském rovníku, musí jít o velmi málo pomaleji, než přesně stejné hodiny umístěné za jinak stejných podmínek na zemském pólu.

§5. Teorém o sčítání rychlostí

V systému *k*, který se pohybuje podél osy *X* systému *K* rychlostí *v*, se pohybuje bod podle rovnic:

$$\xi=w_\xi\tau\,,$$

$$\eta=w_\eta\tau\,,$$

$$\zeta = 0\,,$$

přičemž w_ξ a w_η mají význam konstant.

Hledáme pohyb bodu vzhledem k systému K. Pokud zavedeme do pohybových rovnic bodu pomocí transformačních rovnic odvozených v § 3 veličiny x, y, z, t, tak dostaneme:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t\,,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t\,,$$

$$z = 0\,.$$

Zákon o rovnoběžníku rychlostí platí tedy podle naší teorie jen v prvním přiblížení. Dosadíme:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

a

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{w_y}{w_x}\,;$$

α je pak úhel mezi rychlostmi v a w. Po jednoduchém výpočtu vyjde:

$$U = \frac{\sqrt{\left(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha\right) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}\,.$$

Je pozoruhodné, že v a w se projevují ve výsledné rychlosti symetricky. Pokud má i w směr X-ové osy (Ξ -ová osa), obdržíme:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}\,.$$

Z této rovnice plyne, že složením dvou rychlostí, které jsou menší než V, vznikne vždy rychlost menší než V. Dosadíme-li totiž $v = V - \kappa$, $w = V - \lambda$, přičemž κ a λ jsou kladná a menší než V, tak je:

$$U = V\,\frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V\,.$$

Kromě toho rychlost světla V složením s “podsvětelnou rychlostí” nemůže být změněna. V tomto případě obdržíme:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V\,.$$

Vzorec pro U bychom měli pro případ, že v a w mají stejný směr, obdržet také pomocí dvou transformací dle § 3. Zavedeme vedle systémů K a k, které figurují v § 3, ještě třetí systém k', který se pohybuje rovnoběžně s k, jehož počáteční bod se pohybuje po ose Ξ rychlostí w. Tak obdržíme rovnice mezi veličinami x, y, z, t, a příslušnými veličinami systému k', které se od rovnic nalezených v § 3 liší jen tím, že místo “v” zde vystupuje veličina:

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}\,;$$

z toho plyne, že takovouto paralelní transformaci - jak to musí být - tvoří jedna grupa.

Nyní máme zaveden pro nás potřebný aparát dvou principů příslušné kinematiky a přejdeme k jejich použití v elektrodynamice.